Agrégation 1974

ÉNONCÉ

Dans ce qui suit α désigne un nombre réel donné une fois pour toutes et tel que $\alpha > -\frac{1}{2}$. Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Pour simplifier l'écriture on convient que dans une intégrale du type

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,(1-x^2)^\alpha\,dx.$$

on remplacera le symbole $(1-x^2)^\alpha dx$ par $d\sigma(x)$; on écrira ainsi cette intégrale

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,d\sigma(x)$$

Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle fermé $I = [-1, 1]$, on pose :

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{+1} f(x)\,\overline{g(x)}\,d\sigma(x).$$

I

A. Pour toute fonction f deux fois dérivable sur I on pose :

$$(Lf)(x) = (1-x^2)f''(x) - 2(\alpha+1)\,xf'(x) \quad ; \qquad |x| \leqslant 1$$

1° Montrer que si f et g sont deux fois continûment dérivables sur I, on a

$$(Lf \mid g) = (f \mid Lg)$$

2° Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit E_n l'ensemble des restrictions à I des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n. On convient des abus de notation suivants :

— un polynôme et la fonction qu'il définit, ainsi que la restriction de celle-ci à I, sont désignés par le même symbole;

— pour tout entier $s \geqslant 0$, on note x^s la fonction $x \longmapsto x^s$, $(|x| \leqslant 1)$.

Ceci étant, montrer : $L(E_n) \subset E_n$. En déduire que si P est un polynôme de degré n tel que $(x^s \mid P) = 0$ pour $0 \leqslant s \leqslant n-1$, alors $LP + \lambda_n P = 0$, où λ_n est un nombre réel qu'on déterminera.

3° On pose :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}(1-x^2)^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n+\alpha}].$$

Montrer que P_n est un polynôme de degré n.

Vérifier :

$$\begin{cases} P_n(1) = 1 \\ (P_n \mid P_m) = 0 \quad \text{si } n \neq m \\ LP_n + \lambda_n P_n = 0 \end{cases}$$

B. Pour tout $(a, \lambda) \in \mathbf{R}^2$, le symbole a_+^λ représente le réel égal à 0 si $a \leqslant 0$, égal à a^λ si $a > 0$. Si x, y et z sont des points de $\mathring{I} =]-1, 1[$ on pose :

$$H(x, y, z) = \frac{(1-x^2-y^2-z^2+2xyz)_+^{\alpha-1/2}}{(1-x^2)^\alpha(1-y^2)^\alpha(1-z^2)^\alpha}$$

1° A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout entier $s \geqslant 0$ l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} H(x, y, z)\, z^s\, d\sigma(z)$$

est un polynôme en x et y dont on précisera le degré en x et le degré en y.

2° Que peut-on dire de l'intégrale

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} H(x, y, z)\, P_n(y)\, P_m(z)\, d\sigma(y)\, d\sigma(z)$$

lorsque $n \neq m$?

3° Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ il existe une constante C_n telle que, quels que soient les points x et y de $\mathring{I}$, on ait

$$\int_{-1}^{+1} H(x, y, z)\, P_n(z)\, d\sigma(z) = C_n\, P_n(x)\, P_n(y).$$

Montrer que C_n ne dépend pas de n.

Dans la suite on note C la valeur commune des C_n.

II

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions continues sur I, et si $f \in \mathscr{C}$ on pose :

$$\|f\| = \int_{-1}^{+1} |f(x)|\, d\sigma(x)$$

Si x, y et z sont des points de $\mathring{I}$, on pose :

$$K(x, y, z) = \frac{1}{C} H(x, y, z)$$

1° Quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} K(x, y, z)\, d\sigma(z) \quad ?$$

En utilisant le résultat de I-B-3°, en déduire que $|P_n(x)| \leqslant 1$ pour $x \in I$.

2° Si f et g appartiennent à $\mathscr{C}$, montrer qu'il existe un élément de $\mathscr{C}$, qu'on note $f * g$, tel que pour tout $x \in \mathring{I}$ on ait :

$$(f * g)(x) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} K(x, y, z) f(y)\, g(z)\, d\sigma(y)\, d\sigma(z)\,.$$

Montrer que $\|f * g\| \leqslant \|f\|\,\|g\|$. Étudier $P_n * P_m$.

3° A tout élément f de $\mathscr{C}$ on associe l'application $\hat{f}$ de l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels dans $\mathbf{C}$, définie par $\hat{f}(n) = (f \mid P_n)$.

Si f, g et k sont des éléments de $\mathscr{C}$, montrer que :

i. $\widehat{f * g} = \hat{f} . \hat{g}$

ii. $\hat{f} = 0$ entraîne $f = 0$

iii. $(f * g) * k = f * (g * k)$

4° Soit χ une application de $\mathscr{C}$ dans $\mathbf{C}$ telle que, quels que soient les éléments f et g de $\mathscr{C}$ et les nombres complexes λ et μ, on ait

$$\chi(\lambda f + \mu g) = \lambda \chi(f) + \mu \chi(g) \quad , \quad \chi(f * g) = \chi(f)\, \chi(g)\,.$$

On suppose de plus que si (f_i) est une suite d'éléments de $\mathscr{C}$ telle que $\lim_i \|f_i\| = 0$, alors $\lim_i \chi(f_i) = 0$.

Montrer que, si χ n'est pas identiquement nulle, il existe un entier $n \geqslant 0$ et un seul tel que $\chi(f) = \hat{f}(n)$ pour tout $f \in \mathscr{C}$.

III

Dans toute la suite du problème on suppose que $\alpha = 0$.

1° Soit V l'ouvert obtenu en privant $\mathbf{C}$ du segment I. Montrer que pour tout $x \in V$ il existe un et un seul $z \in V$ tel que

$$|z| > 1 \text{ et } x = \frac{1}{2}(z + z^{-1}).$$

Dans ce qui suit x et z sont ainsi liés.

2° Pour x fixé dans V, on considère le cercle orienté Γ que décrit le nombre complexe ξ défini par $(*)\ \dfrac{\xi - 1}{\xi - x} = \dfrac{z - 1}{z - x} e^{i\theta}$ lorsque θ décrit le segment $[-\pi, \pi]$.

Pour tout nombre complexe $\omega \neq x$ on pose :

$$h(\omega) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 - 1}{\omega - x}.$$

Montrer que :

$$P_n(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [h(\xi)]^n \frac{d\xi}{\xi - x}$$

3° Calculer $h(z)$ et $h'(z)$. Montrer que la droite passant par -1 et par x passe aussi par le centre du cercle Γ.

Montrer que $|z+1| > |x+1|$, puis que, si $\xi \in \Gamma$ et $\xi \neq z$, on a $|h(\xi)| < |h(z)|$.

4° Montrer qu'on peut mettre $P_n(x)$ sous la forme :

$$P_n(x) = -\frac{z^n}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} [G(\theta)]^n \varphi(\theta)\, d\theta$$

où $G(\theta) = z^{-1}h(\xi)$, ξ et θ étant liés par la relation (*). Sans chercher à expliciter G et φ, on donnera les valeurs de $\varphi(0)$ et du coefficient b tel que $G(\theta) = 1 - b\,\theta^2 + o(\theta^2)$, lorsque θ tend vers zéro. En déduire qu'il existe un nombre $\gamma > 0$ tel que

$$|G(\theta)| \leqslant e^{-\gamma\theta^2}$$

pour $0 \leqslant |\theta| \leqslant \pi$.

5° Montrer que pour tout $x \in V$, on a :

$$\lim_n \left(n^{1/2} z^{-n} P_n(x)\right) = \frac{z}{\sqrt{\pi}}(z^2-1)^{-1/2}$$

où la détermination de $(z^2-1)^{-1/2}$ dans l'ouvert V est celle qui est réelle lorsque z est réel et supérieur à 1.

IV

1° Soit $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels telle que $a_n \geqslant 1$, et $a_n \leqslant a_r\, a_s$ lorsque $n \leqslant r + s$.

Montrer que $\rho = \lim_n (n^{-1} \log a_n)$ existe et est fini.

Que peut-on dire de la position de $n^{-1} \log a_n$ par rapport à ρ ?

2° Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $\omega_n^{-1} = (P_n \mid P_n)$.

Une suite $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ du type considéré en IV-1° étant fixée, on désigne par $\mathcal{C}_a$ l'ensemble des fonctions f continues sur I, telles que $\|f\|_a < \infty$, où l'on pose :

$$\|f\|_a = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n\, a_n\, |\hat{f}(n)|.$$

Montrer que si $f \in \mathcal{C}_a$ et $x \in \mathrm{I}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \widehat{f}(n) \, \mathrm{P}_n(x) \, .$$

3° Montrer qu'il existe des nombres $c_{n,m,k}$ (n, m et k étant des entiers $\geqslant 0$) tels que $c_{n,m,k} = 0$ si $k > n + m$ et

$$\mathrm{P}_n \, \mathrm{P}_m = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,m,k} \, \mathrm{P}_k$$

On admettra sans démonstration que $c_{n,m,k} \geqslant 0$, quels que soient n, m et k.

4° Montrer que si f et g appartiennent à $\mathcal{C}_a$ on a :

$$fg \in \mathcal{C}_a \quad \text{et} \quad \|fg\|_a \leqslant \|f\|_a \, \|g\|_a \, .$$

5° Soit Φ une application de $\mathcal{C}_a$ dans $\mathbf{C}$ telle que, quels que soient les éléments f et g de $\mathcal{C}_a$ et les nombres complexes λ et μ, on ait :

$$\Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \Phi(f) + \mu \Phi(g)$$
$$\Phi(fg) = \Phi(f) \, \Phi(g)$$

On suppose de plus que $\Phi(\mathrm{P}_0) \neq 0$, et que $\lim\limits_i \Phi(f_i) = 0$ si $\lim\limits_i \|f_i\|_a = 0$.

a. Montrer que si $\rho = 0$ (cf. la question IV-1° pour la définition de ρ) il existe un point x_0 de I et un seul tel que $\Phi(f) = f(x_0)$ pour tout $f \in \mathcal{C}_a$.

b. Si $\rho > 0$, montrer qu'on peut étendre le domaine de définition de tout élément $f \in \mathcal{C}_a$ en posant encore :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \widehat{f}(n) \, \mathrm{P}_n(x)$$

pour tout nombre complexe x appartenant à la partie compacte $\mathcal{S}$ de $\mathbf{C}$ délimitée par l'ellipse de foyers 1, -1 et de demi-grand axe égal à $\operatorname{ch} \rho$.

En déduire alors qu'il existe un point x_0 et un seul de $\mathcal{S}$ tel que $\Phi(f) = f(x_0)$ pour tout $f \in \mathcal{C}_a$.
